黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 18

$$\sum_{n=0}^\infty \binom{2n+1}{n}\frac{2^{-(2n+1)}}{2n+1} = 1$$

黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

$$\sum_{n=0}^\infty \binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n+s} = B(s,1/2).$$

For examples,

$$\sum_{n=0}^\infty \binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n+1/2} = \pi,$$
$$\sum_{n=0}^\infty \binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n+1} = 2,$$
$$\sum_{n=0}^\infty \binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n+3/2} = \frac{\pi}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

この手の公式はベータ函数がらみであることが多いです。

2017年05月18日 11:53 · Web · 0 · 1 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 18

$\sum_{n=0}^\infty \binom{2n}{n}\frac{2^{-2n}}{n+s} = B(s,1/2)$ の証明

二項展開によって、

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^\infty \binom{2n}{n}\frac{x^n}{2^{2n}}.$$

これよく出て来ます。対称な二項分布の真ん中の確率の母函数は $1/\sqrt{1-x}$ になる。

上の公式をベータ函数の積分による定義式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&B(s, 1/2) \\
&= \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{-1/2}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-2n} \int_0^1 x^{n+s-1}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{2^{-2n}}{n+s}.
\end{aligned}
$$

mathtod.online powered by Mastodon